Lösungen

Thema: **Zahlensysteme**

Aufgabe 1: Stelle die Dezimalzahl 255d als Hexadezimalzahl, als Oktalzahl und als Binärzahl dar.

1. Hexadezimalzahlen werden als Summe von Potenzen zur **Basis 16** dargestellt:

$\Rightarrow$ $255d = \ldots + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{16^3} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{16^2} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{16^1} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{16^0}$

Es gilt zunächst, die höchste 16er-Potenz, die kleiner oder gleich 255 ist, zu finden.

$\Rightarrow$ $\mathbf{16^3} = 4096$ (zu viel); $\mathbf{16^2} = 256$ (zu viel); $\mathbf{16^1} = 16$ (ok)

$\Rightarrow$ $255d = \_\_\_\_ \cdot 16^1 + \_\_\_\_ \cdot 16^0$

Nun wird ermittelt, wie oft diese Potenz in die Zahl 255 passt.

$\Rightarrow$ 255 / 16 = 15 Rest: 15

$\Rightarrow$ $255d = \underline{15} \cdot \mathbf{16^1} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{16^0}$

Wie oft passen die folgenden Potenzen in den jeweiligen Rest?

$\Rightarrow$ 15 / 1 = 15 Rest: 0 (das war hier natürlich einfach; der Rest ist nach der letzten Potenz immer 0)

$\Rightarrow$ $255d = \underline{15} \cdot \mathbf{16^1} + \underline{15} \cdot \mathbf{16^0}$

Die entsprechenden Symbole für die ermittelten Vorfaktoren (hier: „F“) hintereinander schreiben:

$\Rightarrow$ 255d = FFh

2. Oktalzahlen werden als Summe von Potenzen zur **Basis 8** dargestellt:

$\Rightarrow$ $255d = \ldots + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{8^3} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{8^2} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{8^1} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{8^0}$

Es gilt zunächst, die höchste 8er-Potenz, die kleiner oder gleich 255 ist, zu finden.

$\Rightarrow$ $\mathbf{8^3} = 512$ (zu viel); $\mathbf{8^2} = 64$ (ok)

$\Rightarrow$ $255d = \_\_\_\_ \cdot \mathbf{8^2} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{8^1} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{8^0}$

Nun wird ermittelt, wie oft diese Potenz in die Zahl 255 passt.

$\Rightarrow$ 255 / 64 = 3 Rest: 63

$\Rightarrow$ $255d = \underline{3} \cdot \mathbf{8^2} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{8^1} + \_\_\_\_ \cdot \mathbf{8^0}$

Wie oft passen die folgenden Potenzen in den jeweiligen Rest?

$\Rightarrow$ 63 / 8 = 7 Rest: 7 sowie 7 / 1 = 7 Rest: 0

$\Rightarrow$ $255d = \underline{3} \cdot \mathbf{8^2} + \underline{7} \cdot \mathbf{8^1} + \underline{7} \cdot \mathbf{8^0}$

Die entsprechenden Symbole für die ermittelten Vorfaktoren hintereinander schreiben:

$\Rightarrow$ 255d = 377o

3. Binärzahlen werden als Summe von Potenzen zur **Basis 2** dargestellt:
⇒ 255d = ... + __ · 2^8 + __ · 2^7 + __ · 2^6 + __ · 2^5 + __ · 2^4 + __ · 2^3 + __ · 2^2 + __ · 2^1 + __ · 2^0

Es gilt zunächst, die höchste 2er-Potenz, die kleiner oder gleich 255 ist, zu finden.
⇒ 2^8 = 256 (zu viel); 2^7 = 128 (ok)
⇒ 255d = __ · 2^7 + __ · 2^6 + __ · 2^5 + __ · 2^4 + __ · 2^3 + __ · 2^2 + __ · 2^1 + __ · 2^0

Nun wird ermittelt, wie oft diese Potenz in die Zahl 255 passt.
⇒ 255 / 128 = 1 Rest: 127
⇒ 255d = 1 · 2^7 + __ · 2^6 + __ · 2^5 + __ · 2^4 + __ · 2^3 + __ · 2^2 + __ · 2^1 + __ · 2^0

Wie oft passen die folgenden Potenzen in den jeweiligen Rest?
⇒ 127 / 64 = 1 Rest: 63; 63 / 32 = 1 Rest: 31; 31 / 16 = 1 Rest: 15; 15 / 8 = 1 Rest: 7 usw.
⇒ 255d = 1 · 2^7 + 1 · 2^6 + 1 · 2^5 + 1 · 2^4 + 1 · 2^3 + 1 · 2^2 + 1 · 2^1 + 1 · 2^0

Die entsprechenden Symbole für die ermittelten Vorfaktoren hintereinander schreiben:
⇒ 255d = 11111111b

Wegen der besseren Lesbarkeit gruppiert man oft jeweils vier Symbole zusammen.
⇒ 255d = 1111 1111 b

Alternativer Lösungsweg zu Aufgabe 1

1. Wir teilen die zu codierende Dezimalzahl durch die Basis 16
⇒ 255 / 16 = **15** Rest 15

Den Teilungsrest drücken wir durch das entsprechende Symbol („F“) aus und schreiben dieses ganz nach rechts in unsere Ergebnis-Hexadezimalzahl.
⇒ 255d = ...Fh

Das ganzteilige Ergebnis **15** teilen wir wiederum durch die Basis 16:
⇒ 15 / 16 = **0** Rest 15

Den Teilungsrest drücken wir wieder durch das entsprechende Symbol („F“) aus und schreiben dieses links neben das bereits vorhandene „F“ in der Ergebnis-Hexadezimalzahl.
⇒ 255d = ...FFh

Das ganzteilige Ergebnis ist **0**, wir sind fertig.
⇒ 255d = FFh

2. Wir teilen die zu codierende Dezimalzahl durch die Basis 8

⇒ 255 / 8 = **31** Rest 7

Den Teilungsrest schreiben wir ganz nach rechts in unsere Ergebnis-Oktalzahl.

⇒ 255d = ...7o

Das ganzteilige Ergebnis **31** teilen wir wiederum durch die Basis 8:

⇒ 31 / 8 = **3** Rest 7

Den Teilungsrest schreiben wir links neben die bereits vorhandene 7 in unsere Ergebnis-Oktalzahl.

⇒ 255d = ...77o

Das ganzteilige Ergebnis **3** teilen wir wiederum durch die Basis 8:

⇒ 3 / 8 = **0** Rest 3

Den Teilungsrest schreiben wir links neben die linke 7 in unsere Ergebnis-Oktalzahl.

⇒ 255d = ...377o

Das ganzteilige Ergebnis ist **0**, wir sind fertig.

⇒ 255d = 377o

3. Wir teilen die zu codierende Dezimalzahl durch die Basis 2

⇒ 255 / 2 = **127** Rest 1

Den Teilungsrest schreiben wir ganz nach rechts in unsere Ergebnis-Binärzahl.

⇒ 255d = ...1b

Das ganzteilige Ergebnis **127** teilen wir wiederum durch die Basis 2 usw.:

⇒ 127 / 2 = **63** Rest 1 [Ergebnis: ...11b]
⇒ 63 / 2 = **31** Rest 1 [Ergebnis: ...111b]
⇒ 31 / 2 = **15** Rest 1 [Ergebnis: ...1111b]
⇒ 15 / 2 = **7** Rest 1 [Ergebnis: ...11111b]
⇒ 7 / 2 = **3** Rest 1 [Ergebnis: ...111111b]
⇒ 3 / 2 = **1** Rest 1 [Ergebnis: ...1111111b]
⇒ 1 / 2 = **0** Rest 1 [Ergebnis: ...11111111b]

Das ganzteilige Ergebnis ist **0**, wir sind fertig.

⇒ 255d = 1111 1111 b

Aufgabe 2: Decodiere die Hexadezimalzahl CDh und die Oktalzahl CDo
(Decodieren heißt: In eine für uns Menschen verständliche Sprache bringen, in diesem Fall also: In ein verständliches Zahlensystem, folglich das Dezimalsystem)

1. Hexadezimalzahlen werden als Summe von Potenzen zur **Basis 16** dargestellt:

$\Rightarrow$ _____ d = ... + ____ · $\mathbf{16^3}$ + ____ · $\mathbf{16^2}$ + ____ · $\mathbf{16^1}$ + ____ · $\mathbf{16^0}$

Den zwei Symbolen „C“ und „D“ wird ihre jeweilige Wertigkeit zugeordnet und diese an die entsprechende Stelle geschrieben

$\Rightarrow$ _____ d = 12 · $\mathbf{16^1}$ + 13 · $\mathbf{16^0}$

Letztlich ist nur noch die Summe aus den zwei Potenzen zu berechnen und fertig.

$\Rightarrow$ 205 d = 12 · $\mathbf{16^1}$ + 13 · $\mathbf{16^0}$

2. Oktalzahlen werden als Summe von Potenzen zur **Basis 8** dargestellt:

$\Rightarrow$ _____ d = ... + ____ · $\mathbf{8^3}$ + ____ · $\mathbf{8^2}$ + ____ · $\mathbf{8^1}$ + ____ · $\mathbf{8^0}$

Den zwei Symbolen „C“ und „D“ wird ihre jeweilige Wertigkeit zugeordnet und diese an die entsprechende Stelle geschrieben

$\Rightarrow$ Die Symbole „C“ und „D“ gibt es im Oktalsystem nicht, somit gibt es auch die Zahl CDo nicht!

$\Rightarrow$ Es gibt folglich keine Lösung zu dieser Teilaufgabe. Die Lösungsmenge ist leer.

Aufgabe 3: Decodiere die Binärzahl 00111111b

Binärzahlen werden als Summe von Potenzen zur **Basis 2** dargestellt:

$\Rightarrow$ _____ d = ... + __ · $\mathbf{2^8}$ + __ · $\mathbf{2^7}$ + __ · $\mathbf{2^6}$ + __ · $\mathbf{2^5}$ + __ · $\mathbf{2^4}$ + __ · $\mathbf{2^3}$ + __ · $\mathbf{2^2}$ + __ · $\mathbf{2^1}$ + __ · $\mathbf{2^0}$

Die jeweiligen Ziffern der Binärzahl an die entsprechenden Stellen schreiben.

$\Rightarrow$ _____ d = 0 · $\mathbf{2^7}$ + 0 · $\mathbf{2^6}$ + 1 · $\mathbf{2^5}$ + 1 · $\mathbf{2^4}$ + 1 · $\mathbf{2^3}$ + 1 · $\mathbf{2^2}$ + 1 · $\mathbf{2^1}$ + 1 · $\mathbf{2^0}$

Letztlich ist nur noch die Summe aus den Potenzen zu berechnen und fertig.

$\Rightarrow$ 63 d = 0 · $\mathbf{2^7}$ + 0 · $\mathbf{2^6}$ + 1 · $\mathbf{2^5}$ + 1 · $\mathbf{2^4}$ + 1 · $\mathbf{2^3}$ + 1 · $\mathbf{2^2}$ + 1 · $\mathbf{2^1}$ + 1 · $\mathbf{2^0}$