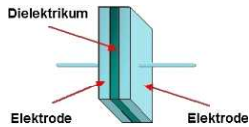


Kapazität und Induktivität - KOMPAKT

1. Der Kondensator

1.1 Aufbau

Ein Kondensator besteht aus zwei leitfähigen Platten, den **Elektroden** und einem dazwischen liegenden Isolierstoff, dem **Dielektrikum**.



Schaltzeichen:

Wird eine Gleichspannung an die Anschlüsse eines Kondensators angelegt, fließt kurzzeitig ein Strom. Die eine Elektrode wird positiv, die andere negativ geladen.

- Beim Einschalten verhält sich der Kondensator wie ein Kurzschluss
- Ein Kondensator speichert elektrische Ladungen
- Nach dem Ladevorgang sperrt der Kondensator den Gleichstrom

Je nach Höhe der angelegten Spannung steigt auch die Höhe des Ladestroms und somit die Höhe der auf den Kondensatorplatten gespeicherten elektrischen Ladung:

$$Q \sim U \rightarrow Q = k \cdot U \rightarrow k = \frac{Q}{U}$$

Die Konstante k ist vom Aufbau des Kondensators abhängig. Sie wird **Kapazität C** genannt:

$$C = \frac{Q}{U} \quad [C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} = F \quad (\text{Farad})$$

Die Kapazität ist umso größer, je größer die Fläche und je kleiner der Abstand der Kondensatorplatten ist:

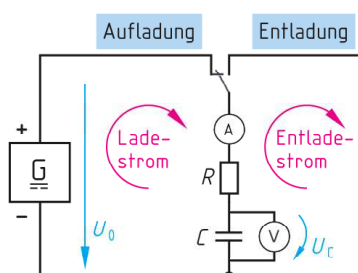
$$C \sim A \text{ und } C \sim \frac{1}{l} \rightarrow C \sim \frac{A}{l} \rightarrow C = k \cdot \frac{A}{l}$$

Die Konstante k ist vom verwendeten Dielektrikum abhängig. Sie wird **Permittivität ϵ** (Epsilon) genannt und ist ein Vielfaches der **elektrischen Feldkonstante ϵ_0** ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$): $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

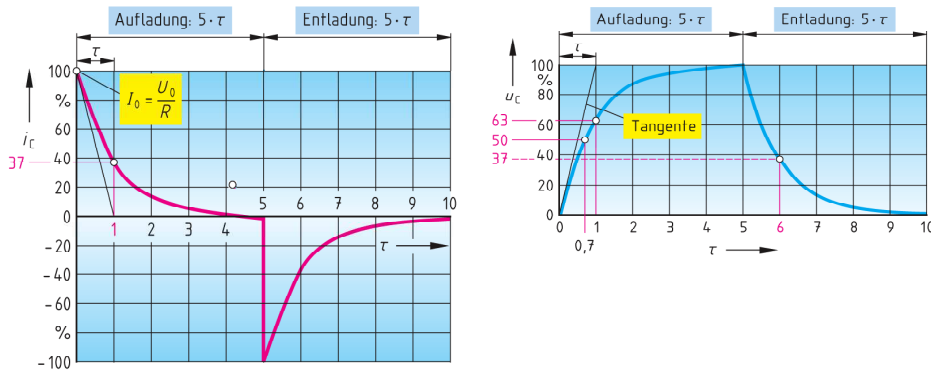
Die **Permittivitätszahl ϵ_r** gibt an, wie viel mal größer die Kapazität eines Kondensators wird, wenn statt Luft ($\epsilon_r = 1$) ein anderer Isolierstoff als Dielektrikum verwendet wird.

$$C = \epsilon \cdot \frac{A}{l} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{l}$$

1.2 Kondensator im Gleichstromkreis



Lade- und Entladeverhalten:



Beim Einschalten wie auch beim Umschalten wirkt der Kondensator wie ein Kurzschluss. Die Höhe des Anfangsstroms I_0 wird daher allein durch den Widerstand R bestimmt.

Lade- und Entladezeit:

Ein Maß für die Lade- bzw. Entladezeit ist die **Zeitkonstante τ** (Tau).

$$\tau = R \cdot C \quad [\tau] = [R] \cdot [C] = \Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} = s$$

In der Zeit τ steigt die Kondensatorspannung beim Laden auf 63 % der Quellenspannung. In der gleichen Zeit sinkt der Ladestrom auf 37 % seines Anfangswertes.

Nach einer Zeitdauer von $t_C = 5 \cdot \tau$ gilt der Kondensator als praktisch vollständig geladen bzw. entladen.

Spannungs- und Stromverlauf beim Laden und Entladen von Kondensatoren folgen einer Exponentialfunktion (e-Funktion):

Laden	Entladen
$i_C = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$	$i_C = -I_0 \cdot e^{-t/\tau}$
$u_C = U_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$	$u_C = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$

mit $I_0 = \frac{U_0}{R}$

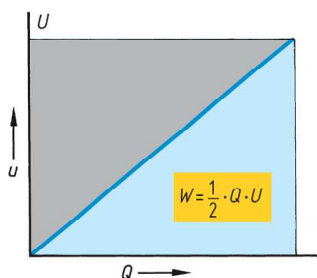
Energiespeicherung:

$$W = U \cdot I \cdot t \quad | \quad I \cdot t = Q$$

$$= U \cdot Q$$

Elektrische Energie bei konstantem Strom und konstanter Spannung

Während des Ladens eines Kondensators wird der Spannungsquelle Energie entnommen. Diese Energie wird im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert. Die Spannung am Kondensator steigt während des Ladevorgangs proportional zur aufgenommenen Ladungsmenge:



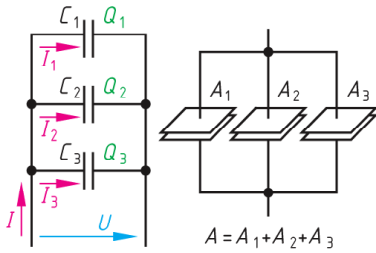
Das Dreieck unter der Ladekurve entspricht der gespeicherten elektrischen Energie:

$$W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad [W] = [C] \cdot [U^2] = F \cdot V^2 = \frac{As}{V} \cdot V^2 = V \cdot A \cdot s = J$$

1.3 Schaltung von Kondensatoren

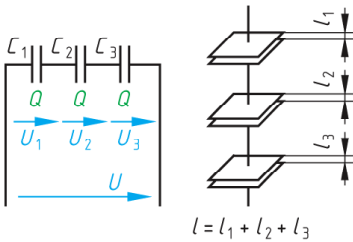
Parallelschaltung:



$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

- an jedem Kondensator liegt die gleiche Spannung
- der Gesamtstrom teilt sich in Teiladeströme auf
- die Gesamtladung ist die Summe der Teiladungen

Reihenschaltung:



$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

- an jedem Kondensator liegt eine Teilspannung
Diese ist umgekehrt proportional zur Kapazität
- durch jeden Kondensator fließt der gleiche Ladestrom
- jeder Kondensator speichert eine gleich große Ladung Q

Geladene Kondensatoren können lebensgefährlich sein!

Vor Beginn der Arbeiten mit größeren Kapazitäten müssen diese über einen Widerstand entladen werden.

1.4 Kondensator im Wechselstromkreis

Im Wechselstromkreis mit einem Kondensator fließt durch ständiges Auf- und Entladen ein Strom. Der Kondensator verhält sich im Wechselstromkreis wie ein Widerstand. Die Konstante U_C / I_C ist vom Kondensator abhängig. Sie wird **kapazitiver Blindwiderstand X_C** genannt:

$$X_C = \frac{U_C}{I_C}$$

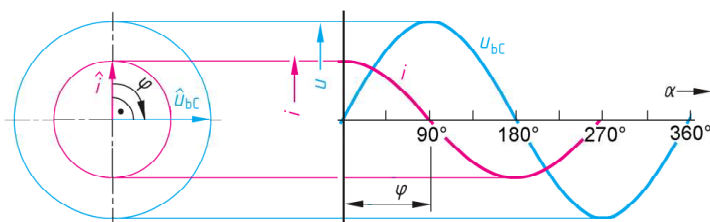
Der kapazitive Blindwiderstand ist von der Kapazität und von der Netzfrequenz abhängig. Er ist umso größer, je kleiner die Frequenz und je kleiner die Kapazität ist:

$$X_C \sim \frac{1}{f} \text{ und } X_C \sim \frac{1}{C} \rightarrow X_C \sim \frac{1}{f \cdot C} \rightarrow X_C = \frac{1}{k \cdot f \cdot C}$$

Genauere Untersuchungen ergeben:

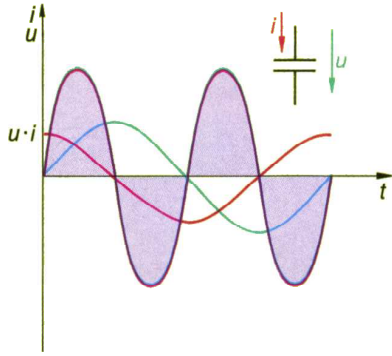
$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Die am Kondensator anliegende Spannung hat einen sinusförmigen Verlauf. Der höchste Ladestrom fließt, wenn die Kondensatorspannung gleich Null ist. Bei maximaler Kondensatorspannung fließt kein Ladestrom mehr.



→ Der Strom eilt der Spannung um 90° ($\pi/2$) voraus.

Kondensatoren benötigen Energie, um das **elektrische Feld** aufbauen zu können. Diese Energie wird jeweils beim Laden der Spannungsquelle entnommen und im elektrischen Feld gespeichert, danach beim Entladen jedoch wieder ins Netz zurückgespeist. Der Leistungsverlauf ($P = U \cdot I$) ergibt sich aus dem Liniendiagramm:



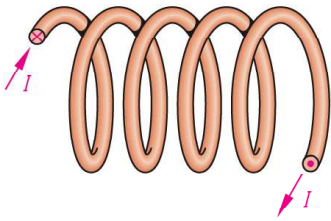
Die mittlere Leistung ist Null. Es entsteht also keine Wirkleistung. Man spricht von der kapazitiven Blindleistung Q_C :


$$Q_C = U_C \cdot I_C \quad [Q_C] = \text{var (Voltampère reaktiv)}$$

2. Die Spule

2.1 Aufbau

Eine Spule besteht aus mehreren in Reihe geschalteten Leiterschleifen.



Schaltzeichen: 

Wird eine Spule an Gleichspannung gelegt, baut sich durch den Stromfluss ein **elektromagnetisches Feld** auf. Durch die Änderung des magnetischen Flusses wird in der Spule eine Spannung induziert. Diese bewirkt einen dem äußeren Strom entgegenwirkenden Induktionsstrom (**Lenzsche Regel**). Folglich wird während des Aufbaus des Magnetfeldes der Stromfluss durch die Spule verzögert.

- Beim Einschalten verhält sich die Spule wie ein Leerlauf
- Eine Spule speichert Energie im elektromagnetischen Feld
- Nach Aufbau des Magnetfeldes verhält sich die Spule wie ein Kurzschluss

Je nach Höhe des fließenden Stroms steigt auch die Höhe des magnetischen Flusses durch die Spule:

$$\Phi \sim I \rightarrow \Phi = k \cdot I \rightarrow k = \frac{\Phi}{I}$$

Die Konstante k ist vom Aufbau der Spule abhängig. Sie wird **Induktivität L** genannt:

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad [L] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{Vs}{A} = H \quad (\text{Henry})$$

Die Induktivität ist umso größer, je größer die Querschnittsfläche und je kleiner die Länge der Spule ist. Des Weiteren ist sie quadratisch von der Windungszahl abhängig:

$$L \sim N^2 \text{ und } L \sim A \text{ und } L \sim \frac{1}{l} \rightarrow L \sim \frac{N^2 \cdot A}{l} \rightarrow L = k \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l}$$

Die Konstante k ist vom verwendeten Kernmaterial abhängig. Sie wird **Permeabilität μ** (Mü) genannt und ist ein Vielfaches der **magnetischen Feldkonstante μ_0** ($\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$): $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$

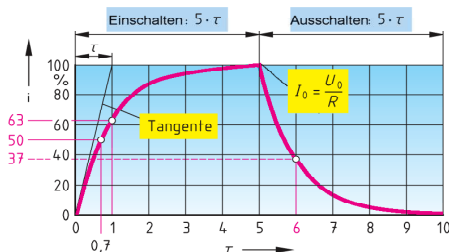
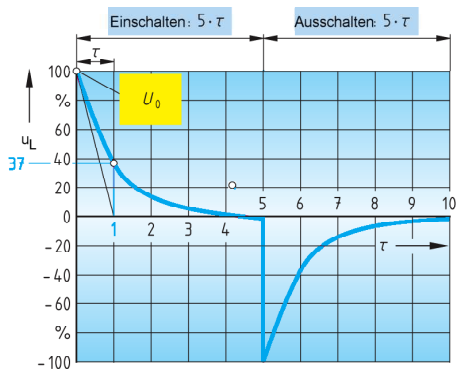
Die **Permeabilitätszahl μ_r** gibt an, wie viel mal größer die Induktivität einer Spule wird, wenn als Kernmaterial statt Luft ($\mu_r = 1$) ein anderes Material verwendet wird.

$$L = \mu \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l}$$

2.2 Spule im Gleichstromkreis

Einschalt- und Ausschaltverhalten:

Beim Einschalten wird durch den Aufbau des magnetischen Feldes eine Spannung induziert und somit der Stromfluss durch die Spule verzögert. Beim Abschalten wird das magnetische Feld wieder abgebaut und eine umgekehrt gepolte Spannung induziert. Dadurch klingt der Spulenstrom nur langsam gegen Null ab:



$$\tau = \frac{L}{R} \quad [\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{H}{\Omega} = \frac{Vs/A}{V/A} = s$$

Einschalten	Ausschalten
$u_L = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$	$u_L = -U_0 \cdot e^{-t/\tau}$
$i = I_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$	$i = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$

mit $I_0 = \frac{U_0}{R}$

Energiespeicherung:

Eine Spule speichert Energie im elektromagnetischen Feld:

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \quad [W] = [L] \cdot [I^2] = H \cdot A^2 = \frac{Vs}{A} \cdot A^2 = V \cdot A \cdot s = J$$

2.3 Schaltung von Spulen

Reihenschaltung:

Durch Hinzuschalten weiterer Spulen nimmt die Gesamtinduktivität zu: $L_{ges} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$

Parallelschaltung:

Durch Hinzuschalten weiterer Spulen nimmt die Gesamtinduktivität ab: $\frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots$

2.4 Spule im Wechselstromkreis

Im Wechselstromkreis hemmt eine Spule durch ständigen Auf- und Abbau ihres Magnetfeldes den Strom. Die Spule verhält sich im Wechselstromkreis wie ein Widerstand. Die Konstante U_L / I_L ist von der Spule abhängig. Sie wird **induktiver Blindwiderstand X_L** genannt:

$$X_L = \frac{U_L}{I_L}$$

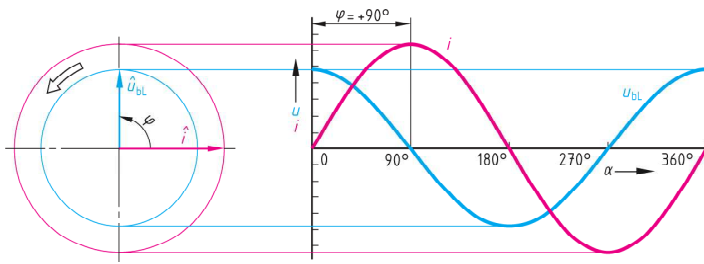
Der induktive Blindwiderstand ist von der Induktivität und von der Netzfrequenz abhängig. Er ist umso größer, je größer die Frequenz und je größer die Induktivität ist:

$$X_L \sim f \text{ und } X_L \sim L \rightarrow X_L \sim f \cdot L \rightarrow X_L = k \cdot f \cdot L$$

Genauere Untersuchungen ergeben:

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = \omega \cdot L$$

Der durch die Spule fließende Strom hat einen sinusförmigen Verlauf.



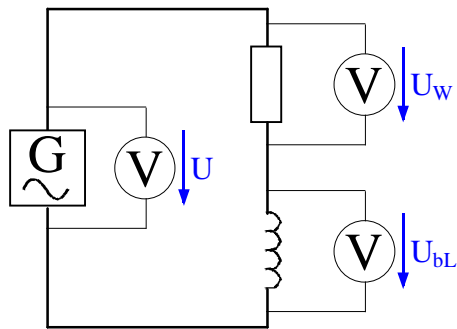
→ Der Strom eilt der Spannung um 90° ($\pi/2$) nach.

Wie beim Kondensator ist die mittlere Leistung Null, auch bei der Spule entsteht keine Wirkleistung. Man spricht von der induktiven Blindleistung Q_L :

$$Q_L = U_L \cdot I_L \quad [Q_L] = \text{var (Voltampère reaktiv)}$$

3. Schaltungen aus Widerständen und Spulen bzw. Kondensatoren

Reihenschaltung



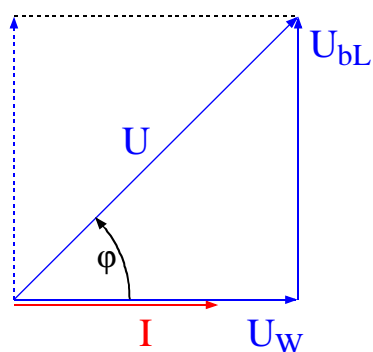
Maschenregel: $U = U_W + U_{bL}$

Messwerte: $U_W = 10 \text{ V}$
 $U_{bL} = 10 \text{ V}$
 $U = 14 \text{ V}$

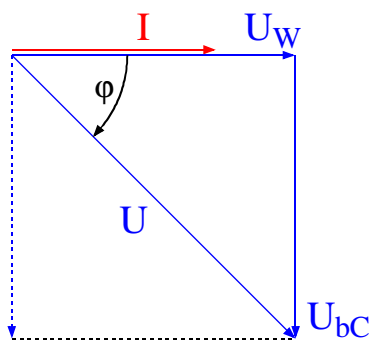
→ Wirkspannung und Blindspannung dürfen nicht arithmetisch addiert werden. Die Gesamtspannung ergibt sich als deren geometrische Summe.

- Strom und Wirkspannung sind immer in Phase.
- Die induktive / kapazitive Blindspannung eilt dem Strom um $90^\circ (= \pi / 2)$ voraus / nach.
- Wirkwerte und Blindwerte stehen im Zeigerdiagramm immer senkrecht aufeinander.

Widerstand und Spule



Widerstand und Kondensator



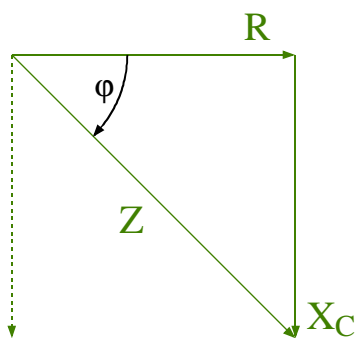
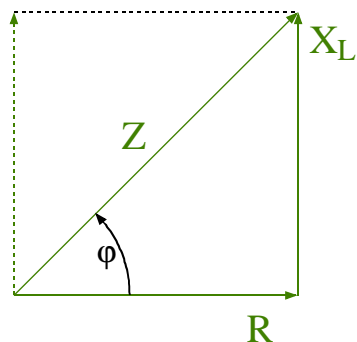
Aus den **Spannungsdreiecken** ergibt sich:

$$U = \sqrt{U_W^2 + U_{bL}^2}$$

bzw.

$$U = \sqrt{U_W^2 + U_{bC}^2}$$

Der scheinbare Gesamtwiderstand Z (= **Scheinwiderstand** bzw. **Impedanz**) ergibt sich aus der geometrischen Summe von Wirkwiderstand R und Blindwiderstand X_L bzw. X_C .



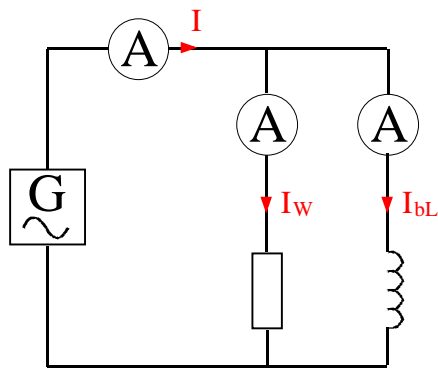
Aus den **Widerstandsdreiecken** ergibt sich:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

bzw.

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

Parallelschaltung



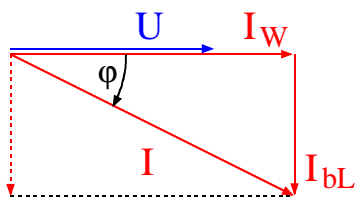
Knotenregel: $I = I_W + I_{bL}$

Messwerte:
 $I_W = 1 \text{ A}$
 $I_{bL} = 0,5 \text{ A}$
 $I = 1,12 \text{ A}$

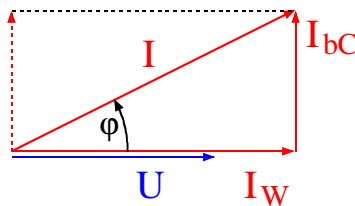
➔ Wirkstrom und Blindstrom dürfen nicht arithmetisch addiert werden. Der Gesamtstrom ergibt sich als deren geometrische Summe.

- Wirkstrom und Gesamtspannung sind in Phase.
- Der induktive / kapazitive Blindstrom eilt dem Wirkstrom um $90^\circ (= \pi / 2)$ nach / voraus.
- Wirkwerte und Blindwerte stehen im Zeigerdiagramm immer senkrecht aufeinander.

Widerstand und Spule



Widerstand und Kondensator



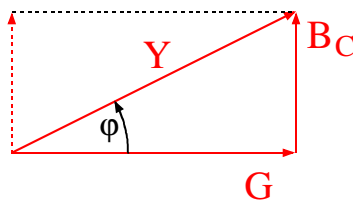
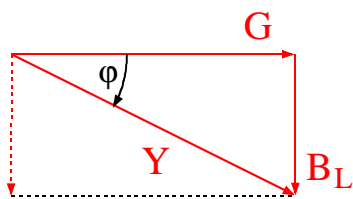
Aus den **Stromdreiecken** ergibt sich:

$$I = \sqrt{I_W^2 + I_{bL}^2}$$

bzw.

$$I = \sqrt{I_W^2 + I_{bC}^2}$$

Der scheinbare Gesamtleitwert Y (= **Scheinleitwert**) ergibt sich aus der geometrischen Summe von Wirkleitwert G und Blindleitwert B_L bzw. B_C .



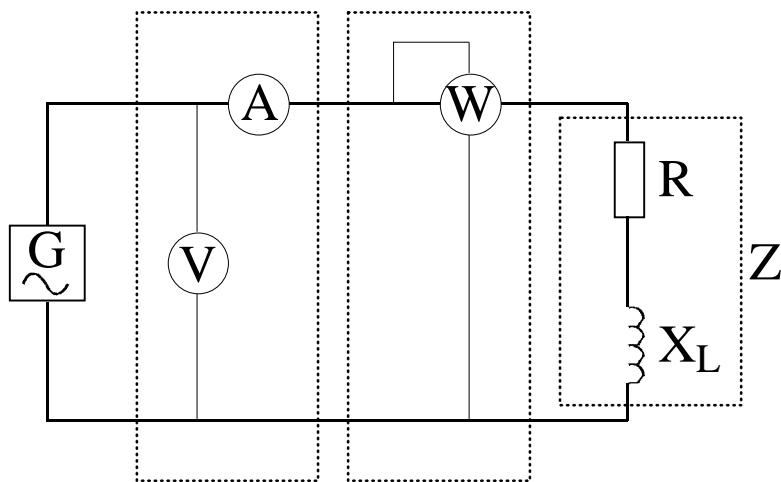
Aus den **Leitwertsdreiecken** ergibt sich:

$$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2}$$

bzw.

$$Y = \sqrt{G^2 + B_C^2}$$

4. Wechselstromleistung



indirekte
Messung der
Scheinleistung S

direkte
Messung der
Wirkleistung P

Bei der indirekten Leistungsmessung wird die **Scheinleistung S**, bei der direkten Leistungsmessung die **Wirkleistung P** gemessen, bspw.

indirekte Messung:

$$U = 230 \text{ V}, I = 1 \text{ A} \rightarrow S = 230 \text{ VA}$$

direkte Messung:

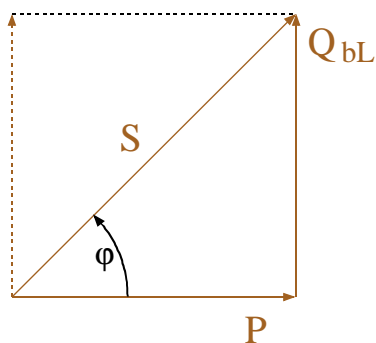
$$P = 150 \text{ W}$$

Die Scheinleistung ergibt sich als geometrische Summe aus Wirkleistung P und **Blindleistung Q**:

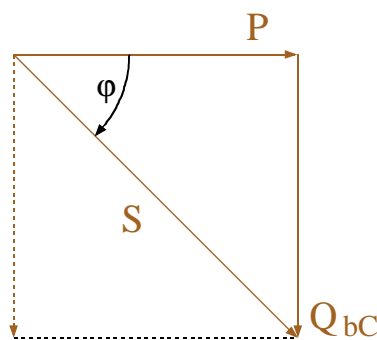
$$S = \sqrt{P^2 + Q_{bL}^2} \quad \text{bzw.} \quad S = \sqrt{P^2 + Q_{bC}^2}$$

Die Wirkleistung ist in Phase mit Wirkstrom und Wirkspannung.
Die Blindleistung ist in Phase mit Blindstrom und Blindspannung.

Wirkwiderstand und Induktivität



Wirkwiderstand und Kapazität



Aus den **Leistungsdreiecken** ergibt sich der **Wirkleistungsfaktor**:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

Es wird generell ein möglichst hoher Wirkleistungsfaktor ($\cos \varphi \rightarrow 1$) angestrebt, da bei gleicher (gewünschter) Wirkleistung und gleicher Spannung kleinere Ströme fließen. Hierdurch wird das Versorgungsnetz entlastet und es lassen sich dadurch die Netzkosten reduzieren (Leiterquerschnitte, Isolatoren ...).

Bei induktiven Lasten (elektrische Antriebssysteme) wird daher mit Hilfe von zu den Motorwicklungen parallel geschalteten Kondensatoren eine **Kompensation** der induktiven Blindleistung durchgeführt.